Regular classes Algebra $\underline{5/10}$ 晚上 (7-9?)

Honor class 5/14 晚上

线上考试 (开摄像头).

行列式. $V = \mathbb{R}^n$.

(有向体积) $f: V \times V \cdots \times V \to \mathbb{R}$

①, ② (多)线性

③ 反对称性.

④ (normalization) $\boxed{f(e_1, \dots, e_n)} = 1$

定理: f 存在性, 唯一性. ($\det A = |A| = f(v_1 \dots v_n)$, $A = [v_1 \dots v_n]$)

$|AB| = |A| \cdot |B|$.

$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$

$\boxed{\det A = \det A^T}$

$\det A = \det A_1 \det A_2$

① 行变换.（化上（下）三角阵）

② 行（列）展开 $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$

证明中取 $e_i = u$

存在性 和唯一性.

想法：唯一性. 行展开 + 归纳.

存在性：行展开 + 归纳. ⇒ 完整展开 的公式

（抽象一点的形式）

V 是 n 维线性空间，满足 ①. ②. ③ 的

$\{f: V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}\}$ 作成线性空间. V_n

只需证明 $\boxed{\dim V_n = 1}$ $f \in V_n$, $f \neq 0$

$f(v_1 \cdots v_n) \neq 0$ 对任一组基 $v_1 \cdots v_n$.

对 n 作归纳：

取 $u \neq 0$, $u \in V$ 　 $\mathrm{span}\, u$ 有补空间 W

$V = \mathrm{span}\, u \oplus W$

构造：$T: V_n \to W_{n-1}$.

$f \longmapsto f'$ 定义为

$f'(w_1 \cdots w_{n-1})$

$= f(u, w_1 \cdots w_{n-1})$

想要证 T 是同构.

① $\ker T = \{0\}$. $T(f) = 0$ 函数.

$f(v_1 \cdots v_n)$ $v_i \in V$

$\boxed{v_i = a_i u + w_i}$

$f(v_1 \cdots v_n) = f(a_1 u + w_1, a_2 u + w_2, \cdots, a_n u + w_n)$

$= a_1 f(u, w_2 \cdots w_n)$

$+ a_2 f(w_1, u, \cdots w_n) + \cdots$

$= a_1 f(u, w_2 \cdots w_n) - a_2 f(u, w_1, w_3 \cdots w_n)$

$+ \cdots$

$= a_1 f'(w_2 \cdots w_n) - a_2 f'(w_1, w_3 \cdots w_n)$

$+a_3 \cdots$

$= 0$

T 满射. 对任意 $g: W \times \cdots \times W \to \mathbb{R}$

① ② ③.

定义 $f: V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$.

$$f(v_1, \cdots v_n) = a_1 g(w_2, \cdots w_n) - a_2 g(w_1, w_3 \cdots w_n)$$

$(v_i = a_i u + w_i)$ $\quad + a_3 g(w_1, w_2, w_4 \cdots w_n) \cdots$

验证 f. ① ② $\boxed{③}$ 练习.

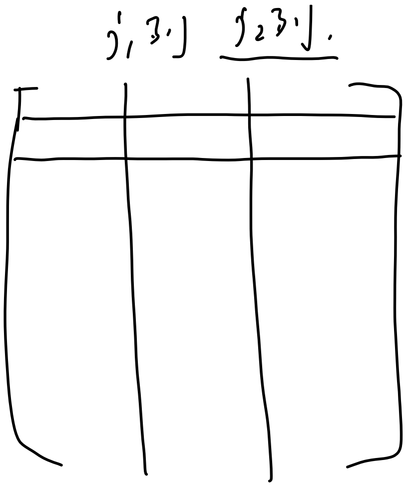
展开公式

$A = (a_{ij})_{n \times n}$.

$$|A| = \sum_{j_1=1}^{n} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} \cdot |A_{1j_1}|$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} \cdot \sum_{j_2 \neq j_1} a_{2j_2} \cdot |(A_{1j_1})_{2j_2}| (-1)^?$$

$(-1)^?$ $\quad |A_{12, j_1 j_2}|$



$\boxed{A_{M,L}.}$ $M \subset \{1,\dots,n\}$
$L \subset \{1,\dots,n\}$

$j_2 > j_1$ 时. 原 j_2 列是 A_{1j_1} 的 j_2-1 列

$j_2 < j_1$ 时. 原 j_2 列是 A_{1j_1} 的 j_2 列

$$? = \begin{cases} \underline{1+j_2-1} \text{ 或者 } 2+j_2' & j_2' > j_1'. \\ 2+j_2'+1 & j_2' < j_1' \end{cases}$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_n \text{互不相同}} (-1)^{\underline{1+j_1+2+j_2'+\cdots+n+j_n}} + \underline{L(j_1\cdots j_n)}$$

$$\boxed{(-1)^{L(j_1\cdots j_n)} \underline{a_{1j_1}}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}}$$

$L(j_1\cdots j_n) = j_1\cdots j_n$ 的逆序对的个数

$\# \{ \underline{j_k < j_l}, \underline{k > l} \}$.

$n!$ 个乘积, $(n-1)\cdot n!$ 运算.

(Leibnitz rule for derivative of det A)

n=2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^0 ad + (-1)^1 bc = ad - bc$$

$\underset{j_1 j_2}{(1,2)}$ $\underset{j_1 j_2}{(2,1)}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + (-1)^2 dhc + (-1)^2 gbf .$$

$\underbrace{(3,1,2)}$ $(\underbrace{2.3}.1)$

$(-1)^3 ceg - hfa - ibd.$

$\underbrace{(3.2,1)}_{3+}$

例: $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$ A. B. C. D $n \times n$.

$\boxed{AC = CA}$

假設 A可逆. $|X| = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$ $= |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$

$= |A(D - CA^{-1}B)|$

$= |AD - CB|$

微扰法: $A+\lambda I = A_\lambda$. $|A_\lambda| = \lambda$ n次多项式

$\mathbb{R}$. $A_\lambda C = C A_\lambda$

除了至多n个λ外 A_λ 可逆.

$\begin{vmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A_\lambda D - CB|$ 成立，除了有限个λ.

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$

推广到一般 $\mathbb{K}$ (域) $M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$A+\lambda I = A_\lambda$. 视为 $\mathbb{K}[\lambda]$ 上的矩阵

$\mathbb{F} = \mathbb{K}(\lambda) = \left\{ \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \middle| \right.$ f, g polynomials of λ. $g(\lambda) \neq 0 \}$

域

$|A_\lambda| \neq 0$,

$\begin{vmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A_\lambda D - CB|$ 在 $\mathbb{K}(\lambda)$ 成立

$\Rightarrow$ 在 $\mathbb{K}[\lambda]$ 中成立.

代入 $\lambda = 0$ （与乘法，加法交换）

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

（尝试 $(I - \alpha\beta^T)^{-1}$ ）

$\alpha, \beta \in M_{n\times 1}$.

定义：伴随 $A^* = (a'_{ij})_{n\times n}$.

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

$$A^* A = A A^* = (\det A) \cdot I.$$

$\det A$ 的第一行展开

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & \\ |A_{13}| & \vdots & \\ \vdots & & \\ (-1)^{n+1}|A_{1n}| & |A_{2n}| & \end{bmatrix}}_{A^*} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}, a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0$$

第二行展开.

$$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \boxed{\frac{1}{\det A} \cdot A^*}$$

$\boxed{\text{Cramer rule}}$

$Ax = b$.　　A 可逆.

$$x = A^{-1}b \Rightarrow \frac{1}{\det A} A^* \cdot b$$

$$x_i = \frac{\det(\ \ b\ \ )}{\det A}.$$

A 的第 i 列换成 b

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2 \\ a_{11} b_2 - a_{21} \cdot b_1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Laplace 公式 (行展开的推广) $M \subset \{1 \dots n\}$ 子集.

$A =$

$$|A| = \sum_{\substack{L \subset \{1 \dots n\} \\ |L| = |M|}} (-1)^{\varepsilon_{M,L}} |A_{M,L}| \, |A_{M^c, L^c}|$$

$$\varepsilon_{M,L} = \Big(\sum_{i \in M} i\Big) + \Big(\sum_{i \in L} i\Big)$$

$V_1 = \operatorname{span}(e_i)_{i \in M}$. $V_2 = \operatorname{span}(e_i)_{i \in M}$.

$V = V_1 \oplus V_2$

$$f(v_1 \dots v_n) = f(v_1^1 + v_1^2, \ v_2^1 + v_2^2, \dots)$$

$$= \sum f\underbrace{(\qquad\qquad)}_{2^n \text{ 项}}$$

$$= \sum f(\ ', \ ', \ ' \ )$$

恰好 $|M|$ 个点 在 V_1 中.

$n-|M|$ 个点 在 V_2 中.

$$= \sum (-1)^{\square} \, f(\underbrace{\quad\quad}_{V_1}, \underbrace{\quad\quad}_{V_2})$$

$$\underline{\det \square} \cdot \underline{\det \square}$$

Cauchy-Binet $\det(AB)$ $A_{m\times n}$. $B_{n\times m}$

$=$ $m<n$